

Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

м. Тернопіль. 3 грудня 2016 року

Завдання. 6 клас

1. Два автомобілі знаходяться на одній дорозі на відстані 200 км, один рухається зі швидкістю 60 км/год, а інший – 40 км/год. Через який час відстань між ними може знову стати 200 км? Укажіть усі можливі відповіді.
2. Частина студентів університету вивчають тільки англійську мову, частина – тільки німецьку, а частина – обидві мови. Англійську мову вивчають 86% усіх студентів, німецьку – 44%. Скільки відсотків усіх цих студентів вивчають обидві мови?
3. Знайдіть чотири цифри a, b, c, d такі, щоб записане нижче додавання було правильним.
$$\begin{array}{r} a b c d \\ a b c \\ + a b \\ \hline a \\ 4 3 2 1 \end{array}$$
4. На яку найменшу кількість частин можна розрізати прямокутник з розмірами 4×9 так, щоб з нього можна було скласти квадрат з розмірами 6×6 ?

На виконання роботи відводиться 3 години

Кожне завдання оцінюється в 7 балів

Використання калькуляторів не дозволяється

Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

м. Тернопіль. 3 грудня 2016 року

Завдання. 7 клас

1. В акваріумі живе 200 рибок. З них 1% голубого кольору, решта – жовті. Скільки жовтих рибок потрібно забрати з акваріуму, щоб голубі рибки становили 2% рибок, що залишилися в акваріумі?
2. Равлик повзе прямо та повертає на 90° через кожні 15 хвилин, рухаючись з однаковою швидкістю. Чи може він через 2,5 годин опинитись у початковій точці? Відповідь обґрунтуйте.
3. Відомо, що число \overline{aba} , $a > b > 0$, ділиться на 7. Доведіть, що й число \overline{bab} ділиться на 7 та знайдіть кількість пар ($\overline{aba}, \overline{bab}$) чисел з описаними властивостями.
4. Промені OA і OB перпендикулярні. Усередині кута AOB проведені промені OC і OM, кут між якими дорівнює 10° . Сума найбільшого та найменшого з кутів AOC, AOM, BOC, BOM та COM дорівнює 85° . На які кути поділили кут AOB промені OC та OM?
5. Двоє гравців грають на прямокутній дошці розмірами 2015×2016 . Шашку, яка спочатку знаходиться у нижній лівій клітинці, вони по черзі можуть пересунути на довільну кількість клітинок або вгору, або вправо. Виграє той, хто своїм ходом досягне правої верхньої клітинки. Хто і як може виграти?

На виконання роботи відводиться 3 години

Кожне завдання оцінюється в 7 балів

Використання калькуляторів не дозволяється

Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

м. Тернопіль. 3 грудня 2016 року

Завдання. 8 клас

1. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює меншій основі, а діагональ трапеції дорівнює більшій основі. Визначте градусні міри кутів трапеції.
2. Розв'яжіть рівняння:

$$||x - 5| + 5| - 8| = 3$$

3. Ціну винограду підвищили на 20%. Для того, щоб записати нову ціну за 1 кг винограду в гривнях, продавцеві було достатньо поміняти місцями цифри числа, записаного на ціннику. Скільки гривень коштував 1 кг винограду до його подорожчання, якщо ця ціна була меншою за 100 гривень? Відповідь обґрунтуйте.
4. Знайдіть принаймні одну пару натуральних чисел (x, y) , що задовольняє рівність :

$$\frac{1}{2}(x^2 - y^3) = 2016$$

5. Чи може пряма, яка не проходить через вершини 2017-кутника, перетинати всі його сторони? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 3 години

Кожне завдання оцінюється в 7 балів

Використання калькуляторів не дозволяється

Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

м. Тернопіль. 3 грудня 2016 року

Завдання. 9 клас

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{|x + 1|}$$

1. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - x - 2}{|x + 1|}$. Користуючись графіком, визначте область значень даної функції.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

2. Доведіть нерівність:

$$y = x^2 + px + q$$

3. Серед усіх квадратних тричленів $y = x^2 + px + q$, які набувають тільки невід'ємних значень, знайдіть той, у якого сума $p + q$ найменша.
4. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) проведені бісектриси зовнішніх кутів A і B до перетину в точці M і бісектриси зовнішніх кутів C і D до перетину в точці N . Відомо, що $MN = 12$ см. Знайдіть периметр трапеції.
5. Чи можна розмістити по колу цифри від 0 до 9 включно так, щоб сума будь-яких трьох цифр, що стоять поряд, не перевищувала :
- а) 14 ; б) 15 ?

На виконання роботи відводиться 3 години

Кожне завдання оцінюється в 7 балів

Використання калькуляторів не дозволяється

Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

м. Тернопіль. 3 грудня 2016 року

Завдання. 10 клас

1. Яке з чисел більше: $\frac{23^{2015} + 1}{23^{2016} + 1}$ чи $\frac{23^{2016} + 1}{23^{2017} + 1}$?
2. Розв'яжіть рівняння : $2x^2 - 3x = 2x\sqrt{x^2 - 3x + 1}$.
3. Про коефіцієнти a, b, c, d двох квадратних тричленів $x^2 + bx + c$ та $x^2 + ax + d$ відомо, що $0 < a < b < c < d$. Чи можуть ці тричлени мати спільний корінь?
4. На площині проведено дві пари взаємно-перпендикулярних прямих так, що утворилися чотири прямокутні трикутники. Доведіть, що середини гіпотенуз цих трикутників є вершинами прямокутника.
5. Близнюки Петрик та Остап вирішили ходити з дому до школи різними дорогами. Петрик спочатку йде 210 метрів на південь, а далі 70 метрів на схід і потрапляє до школи. Остап спочатку йде певний час на північ, а далі по прямій до школи. Скільки саме метрів Остап іде на північ, якщо близнюки ходять з однаковою швидкістю, виходять з дому та приходять до школи одночасно?

На виконання роботи відводиться 3 години

Кожне завдання оцінюється в 7 балів

Використання калькуляторів не дозволяється

Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

м. Тернопіль. 3 грудня 2016 року

Завдання. 11 клас

1. Основою прямої призми є трикутник, довжини сторін якого відносяться як $2:3:4$. Обчисліть площу бічної поверхні цієї призми, якщо площа найменшої бічної грані дорівнює 12 см^2 .
2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 2, \\ \frac{xz}{x+z} = 3, \\ \frac{yz}{y+z} = 4. \end{cases}$$

3. Доведіть, що при будь-якому натуральному n виконується нерівність :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$$

4. Вершини куба деяким чином перенумеровані числами 1; 2; ...; 8. Петрикові повідомили для трьох із шести граней куба номери вершин, що

$$\{1; 4; 6; 8\} \quad \{1; 2; 6; 7\} \quad \{1; 2; 5; 8\}$$

їм відповідають: ; ; . Чи зможе Петрик за цими даними сказати, який номер має вершина, що найбільше віддалена від вершини з номером 5?

5. Шестицифрове число, яке ділиться на 37 записано різними цифрами. Доведіть, що з його цифр можна утворити інше шестицифрове число, яке також ділиться на 37.

На виконання роботи відводиться 3 години

Кожне завдання оцінюється в 7 балів

Використання калькуляторів не дозволяється