

## Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

м. Тернопіль. 30 листопада 2014 року

### Завдання. 6 клас

1. Три цифри п'ятицифрового числа одиниці. Відомо, що це число ділиться на 72. Знайдіть всі такі п'ятицифрові числа.
2. Турист пройшов 0,3 усього шляху, а потім 0,4 того, що залишилось. Загалом він пройшов на 6 км більше від половини шляху. Визначте довжину всього шляху.
3. Володимир, Микола, Петро і Семен – учні 5-го, 6-го, 7-го, 8-го класів – пішли в ліс по гриби. Семикласник не знайшов жодного білого гриба, а учень 5-го класу і Петро – по 8штук. Володимир і шестикласник знайшли багато маслюків і покликали Миколу до гурту. Восьмикласник, семикласник і Микола сміялися із Семена, який зірвав мухомор. Хто в якому класі вчиться?
4. Обчисліть  $\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{18 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 20}$ .

*На виконання роботи відводиться 3 години*

*Кожне завдання оцінюється в 7 балів*

*Використання калькуляторів не дозволяється*

**Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**м. Тернопіль. 30 листопада 2014 року**

**Завдання. 7 клас**

1. Розв'яжіть рівняння:  $7|x| - 3(x + 2) = -10$ .
2. Ціну на підручник з математики спочатку підвищили на 25%, а потім знизили на 20%. Коли підручник коштував дорожче: до підвищення ціни чи після зниження?
3. Деяке двоцифрове число зменшили на 7, потім одержаний результат зменшили в 10 разів і одержали число, яке на 34 менше початкового. Яким було початкове число? Відповідь обґрунтуйте.
4. В середині кута  $AOB$ , який дорівнює  $120^\circ$ , проведені промені  $OC$  і  $OD$  так, що кожен з них є бісектрисою якогось із кутів, що утворилися при цьому. Знайдіть величину кута  $AOC$ . Укажіть всі можливі варіанти.
5. У пустелі зустрілися два мандрівники. Один із них мав наповнену водою дванадцятилітрову посудину, а інший мав дві порожні – восьмилітрову та п'ятилітрову. Перший з мандрівників вирішив поділити воду порівну, але не знав, як ще зробити. Як треба діяти мандрівникам, щоб налити шість літрів води у восьмилітрову посуду?.

***На виконання роботи відводиться 3 години***

***Кожне завдання оцінюється в 7 балів***

***Використання калькуляторів не дозволяється***

**Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**м. Тернопіль. 30 листопада 2014 року**

**Завдання. 8 клас**

1. Дано 10 чисел. Відомо, що сума будь-яких дев'яти із цих чисел дорівнює 1. Чому дорівнює сума усіх даних чисел ?
2. Розв'яжіть рівняння:  $|5 - |2 - 3x|| = x - 1$ .
3. Доведіть, що для будь-якого натурального  $n$  значення виразу  $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$  — є натуральним числом.
4. Дві висоти ромба, проведені з вершин його тупих кутів перетинаються і точкою перетину поділяються у відношенні 1:2. Визначіть кути ромба.
5. У першій коробці кілька жовтих кульок, а у другій — кілька блакитних. Андрій перекладає декілька кульок із першої коробки в другу, після чого перемішує вміст другої коробки. Далі Леся перекладає таку ж саму кількість кульок із другої коробки в першу. Яких кульок тепер більше: жовтих у другій коробці чи блакитних у першій?

***На виконання роботи відводиться 3 години  
Кожне завдання оцінюється в 7 балів  
Використання калькуляторів не дозволяється***

**Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**м. Тернопіль. 30 листопада 2014 року**

**Завдання. 9 клас**

1. Побудуйте графік функції:  $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$ .
2. При яких значеннях параметра  $a$  рівняння  $(\sqrt{x-1} - a)(4x - 5) = 0$  має єдиний корінь?
3. Сторона трикутника дорівнює 10 см, а медіани, проведені до двох інших сторін, – 9см і 12см. Знайдіть площу трикутника.
4. Знайдіть усі натуральні значення  $n$ , для яких обидва числа  $9n+28$  та  $n+5$  є точними квадратами.
5. Автобусні білети мають шестицифрові номери від 000000 до 999999. Білет називається щасливим, якщо у нього сума перших трьох цифр дорівнює сумі останніх трьох. Назвемо білет суперщасливим, якщо він щасливий та серед його цифр є чотири цифри 7, які йдуть підряд (7777). Скільки усього існує суперщасливих номерів білетів серед усіх можливих?

***На виконання роботи відводиться 3 години***

***Кожне завдання оцінюється в 7 балів***

***Використання калькуляторів не дозволяється***

**Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**м. Тернопіль. 30 листопада 2014 року**

**Завдання. 10 клас**

1. Знайдіть число, 12% якого дорівнюють  $\sqrt{22+8\sqrt{6}} - \sqrt{22-8\sqrt{6}}$ .
2. Розв'яжіть нерівність  $(x-2)^{10} (x+3)^{17} (x+1)^5 (x^2+3)^{17} > 0$ .
3. Члени арифметичної прогресії  $(a_n)$  є цілими числами. Відомо, що  $a_3 a_6 = 406$  і при діленні її дев'ятого члена на четвертий член у частці отримуємо 2, а в остачі 6. Знайдіть перший член і різницю прогресії.
4. У трикутнику ABC проведена бісектриса BD. Відомо, що центр описаного кола навколо трикутника ABC, збігається з центром кола, що вписане в трикутник BCD. Знайдіть кути трикутника ABC.
5. Доведіть, що для будь-якого натурального  $n$  значення виразу  $4^n + 15n - 1$  кратне 9.

*На виконання роботи відводиться 3 години*

*Кожне завдання оцінюється в 7 балів*

*Використання калькуляторів не дозволяється*

**Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**м. Тернопіль. 30 листопада 2014 року**

**Завдання. 11 клас**

1. Знайдіть усі значення  $x \in [-90^\circ, 90^\circ]$ , що задовольняють рівняння:  
 $2\cos 10^\circ + \sin 100^\circ + \sin 1000^\circ = 2\sin x$ .
2. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел  $(x, y)$  справджується нерівність:  
 $|x + y| + |1 - x| + |1 - y| \geq 2$ .
3. Розв'яжіть рівняння:  $\sqrt{x - 2} + \sqrt{2x - 5} + \sqrt{x + 2} + 3\sqrt{2x - 5} = 7\sqrt{2}$ .
4. У коло, радіус якого 8см, вписано рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого вдвічі більша за основу. Знайдіть радіус кола, вписаного у цей трикутник.
5. Доведіть, що  $2^n > 2n + 1$ , якщо  $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ .

*На виконання роботи відводиться 3 години*

*Кожне завдання оцінюється в 7 балів*

*Використання калькуляторів не дозволяється*