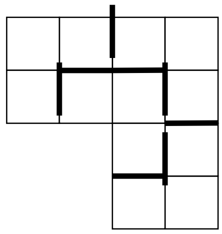
Відповіді та вказівки II етапу олімпіади

6 клас

6.1. Див. рисунок:



6.2. Сьогодні неділя. Марічка почала читати книжку, у якій 290 сторінок. Вона читає 4 сторінки щодня, крім неділі, коли вона прочитує 25 сторінок. Марічка читає кожного дня. За скільки днів вона прочитає книгу?

Вказівка. За тиждень Марічка читає $6 \cdot 4 + 25 = 49$ сторінок. За 6 тижнів вона б прочитала $49 \cdot 6 = 294$ сторінки. Книжку Марічка закінчить на один день раніше. На $6 \cdot 7 - 1 = 41$ день.

Відповідь. 41 день.

6.3 Знайдіть усі шестицифрові числа, які мають вигляд $\overline{a2015b}$ та діляться націло на 45.

***Відповідь*:** 120150 та 520155.

***Розв'язання*.** Зрозуміло, що ці числа повинні бути кратними 9 та 5. Розглянемо два випадки. Якщо воно закінчується на 0, тобто $b = 0$, то його сума цифр дорівнює $a + 8$. Тому для виконання умови повинно $a = 1$. Якщо воно $b = 5$, то його сума цифр дорівнює $a + 13$ і повинно бути $a = 5$. Таким чином маємо дві відповіді.

6.4. Дорога від дому до школи займає в Андрійка 20 хвилин. Одного разу, йдучи до школи, він згадав, що забув вдома ручку. Якщо він тепер продовжуватиме йти до школи, то прийде за 3 хвилини до дзвоника, а якщо ж повернеться додому, то запізниться на 7 хвилин. Яку частину шляху пройшов Андрійко до того, як згадав про ручку?

Відповідь. $\frac{1}{4}$ шляху.

Вказівка. Для того, щоб повернутись до дому і дійти до того місця, де Андрійко згадав про ручку, Андрійкові потрібно 10 хвилин.

6.5. Є сім зовні однакових монет, серед яких п‘ять справжніх (усі однакової маси) і дві фальшиві (однакової маси, але легші за справжні). Як за допомогою двох зважувань на шалькових терезах без гир виділити три справжні монети?

<u>Розв'язання</u>. Занумеруємо монети числами 1, 2, 3, … , 7. Першим зважуванням порівняємо монети 1, 2, 3 з монетами 4, 5, 6. Якщо маси рівні, то в кожній трійці по одній фальшивій монеті, а монета 7 справжня. Тоді наступним зважуванням порівняємо монети 1 і 2. Якщо їхня маса однакова, то вони справжні, а якщо ж ні, то важча з монет 1, 2 монета 3 і монета 7 – справжні. Якщо під час першого – початкового – зважування переважила одна з груп, то всі її монети справжні.

7 клас

7.1. Магазин придбав олівці у коробках у виробника за певну ціну. Тепер він їх продає або по 10 гривень за одну коробку, або по 20 гривень за 3 коробки. Виявилось, що прибуток при продажі однієї коробки олівців та при продажі трьох коробок олівців – однаковий. За якою ціною магазин придбав олівці у виробника?

<u>Відповідь:</u> 5 гривень за коробку.

<u>Розв'язання</u>. Нехай ціна за 1 коробку у виробника дорівнює x грн.. Тоді прибуток від продажу однієї коробки за 10 гривень дорівнює $(10-x)$ грн.. При продажі трьох коробок за 20 гривень їх прибуток складає $(20-3x)$ грн.. Тому маємо рівність: $10-x=20-3x$, звідки $x=5$.

7.3. При якому значенні a має безліч коренів рівняння

(x + 2)(x + a) – x (x + 1) = 3a + 1 ?

<u>Розв'язання</u>.

$$x^2+ax+2x+2a-x^2=3a+1;$$
$$ax+x+2a=3a+1;$$
$$ax+x=a+1$$
$$(a+1)x=a+1.$$

Тільки при *a= – 1* останнє рівняння набуває вигляду *0x=0* і має безліч коренів.

<u>Відповідь</u>: при *a= – 1.*

7.4. Відомо, що натуральні числа m, n такі, що число $5n+m$ ділиться націло на $5m+n$. Чи обов'язково n ділиться націло на m?

Відповідь: обов'язково.

***<u>Розв'язання</u>*.** Нехай справджується рівність: $5n+m=k(5m+n)$, де k – натуральне. Тоді $n(5-k)=m(5k-1)$. Оскільки права частина є натуральним числом, то ліва також, а тому $k\in\{1;\,2;\,3;\,4\}$,

При $k=1$ маємо, що $4n=4m$, звідки $n\,\vdots\,m$.

При $k=2$ маємо, що $3n=9m$, звідки $n\,\vdots\,m$.

При $k=3$ маємо, що $2n=14m$, тобто $n\,\vdots\,m$.

При $k=4$ маємо, що $n=19m$, тобто $n\,\vdots\,m$.

7.5. Смужку паперу розірвали на 16 частин, потім одну з частинок розірвали ще на 16 частин, потім продовжили такуж операцію далі. Чи може на деякому етапі загальна сума шматочків паперу дорівнювати 2015?

Розв'язання:

Якщо позначити кількість операцій буквою n, то на n+1 кроці шматочків паперу буде 16+15n, оскільки при розриванні одного шматочку на 16 до загальної суми додається 15 нових шматочків. Тоді спробуємо знайти натуральний розв'язок рівняння: 16+15n=2015, 15n=2015-16, 15n=1999,

n=1999/15 – не є натуральним числом. Отже в результаті таких операцій не можна отримати 2015 шматочків паперу.

<u>Відповідь:</u> ні

8 клас

8.1. ***Відповідь***. -1. Вказівка. Скористатись означенням модуля.

8.2. Ненульові числа a, b задовольняють умови: $6a+6b=\dfrac{25}{a}+\dfrac{25}{b}=25$.

Чому може дорівнювати значення виразу $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$?

<u>Відповідь:</u> $\frac{13}{6}$.

***<u>Розв'язання</u>*.** З умови задачі маємо, що $6(a+b)=\frac{25(a+b)}{ab}=25$. Оскільки $a+b=\frac{25}{6}$, то $ab=\frac{25}{6}$. Враховуючі, що $a+b=ab$, маємо, що

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=(a+b)-2=\frac{25}{6}-2=\frac{13}{6}.$$

8.3. З множини $\{10; 11; 12; ...; 19\}$ вибрали 5 різних чисел, з множини $\{90; 91; 92; ...; 99\}$ також вибрали 5 різних чисел. Виявилось, що різниця жодних двох чисел з десяти вибраних не кратна 10. Знайдіть суму усіх 10 вибраних чисел.

Відповідь: 545.

***Розв'язання*.** З умов задачі випливає, що в усіх обраних чисел різні останні цифри. Тому суму можна знайти, якщо окремо додати десятки та одиниці цих чисел. Серед десятків є п'ять по 10 та ще п'ять по 90, тому сума десятків дорівнює $5\cdot10+5\cdot90=500$. А серед одиниць маємо кожну цифра рівно один раз, тому їх сума дорівнює: $0+1+2+...+9=45$. Таким чином сума усіх десяти чисел дорівнює 545.

8.4. У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $AB=BD$. На відрізку AB відмічаємо точку K, відмінну від точки A, і таку, що $KD=AD$. На промені CK відклали відрізок $KM=CK$, а на промені BA відклали відрізок $AN=AB$ (вважаємо, що вказані точки розташовані так, як це показане на рис.2). Доведіть, що *DN=DM.*

***Розв'язання*.** За умовою ΔADK – рівнобедрений, тому (рис. 2)

$$\angle BKD=180°-\angle DKA=180°-\angle DAK=180°-\angle BCD=\angle CBK,$$

та $DK=DA=BC$, тому $\Delta DKB=\Delta CBK$. Тому $\angle DCK=\angle BKC=\angle DBK$. Оскільки за умовою $CK=KM$, $NA=AB$, то $CM=2CK=2DB=2AB=NB$, звідки $\Delta CDM=\Delta BDN$, звідки й маємо, що $DM=DN$.

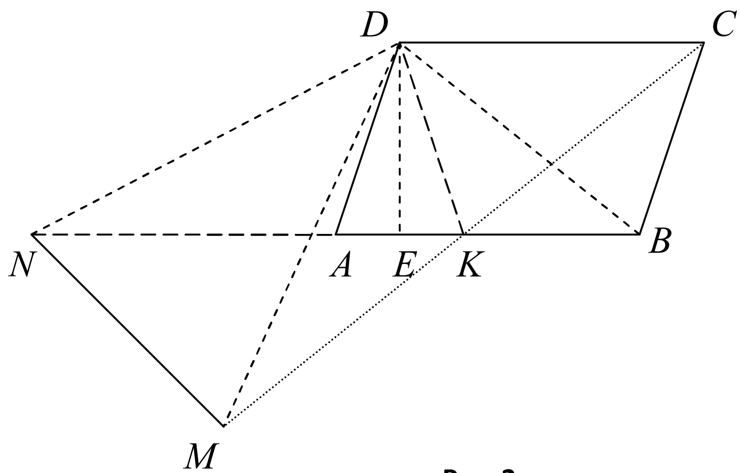


Рис. 2

8.5. Є 40 зовні однакових монет, серед яких 2 фальшиві, причому вони легші від справжніх і важать однаково. Як за допомогою двох зважувань на шалькових терезах без гир відібрати 20 справжніх монет?

Вказівка. Розіб'ємо монети на три купки: А, В і С, що містять по 10, 10 і 20 монет відповідно. Перше зважування: порівняємо вагу А і В. Можливі два випадки. Якщо А=В, то порівнюємо вагу А+В і С. Якщо А>В (другий випадок аналогічний), то розіб‘ємо С на дві купки по 10 монет і порівняємо їхню вагу.

9 клас

9.1. Розв’яжіть рівняння: $(x-1)\cdot|x^2+1|+|x-1|\cdot(x^2+1)=0$.

***<u>Відповідь</u>*:** $x\le 1$.

***<u>Розв’язання</u>*.** Оскільки $|x^2+1|=x^2+1>0$, то задане рівняння можна переписати у вигляді: $(x-1)+|x-1|=0$, або $|x-1|=-(x-1)$, це рівносильне умові $x-1\le 0$, тобто розв’язком рівняння є множина чисел $x\le 1$.

9.2. Спростити вираз:

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\ldots+\frac{1}{(a+2013)(a+2014)}+\frac{1}{(a+2014)(a+2015)}.$$

<u>Розв’язання.</u>

Кожний з доданків можна подати у вигляді різниці двох дробів із чисельниками 1, а знаменниками – послідовними натуральними числами:

$=$

9.3. Для всіх дійсних a і c доведіть нерівність

$16a^8+c^8+8\ge 16a^2c^2$

<u>Розв’язання.</u>

Використовуючи нерівність Коші, отримуємо:

$$16a^8+c^8+8\ge 2\sqrt{16a^8c^8}+8=8a^4c^4+8=8(a^4c^4+1)\ge 8\cdot 2\sqrt{a^4c^4}=16a^2c^2.$$

9.4. У паралелограмі $ABCD$ проведені висоти BE і DF на сторони AD і BC відповідно, які ділять цей паралелограм на три частини рівної площі. На промені BD за вершину D відкладається відрізок $DG=BD$. Пряма BE перетинає відрізок AG у точці H. Знайдіть відношення $AH:HG$.

<u>Відповідь:</u> $AH : HG = 1 : 1$.

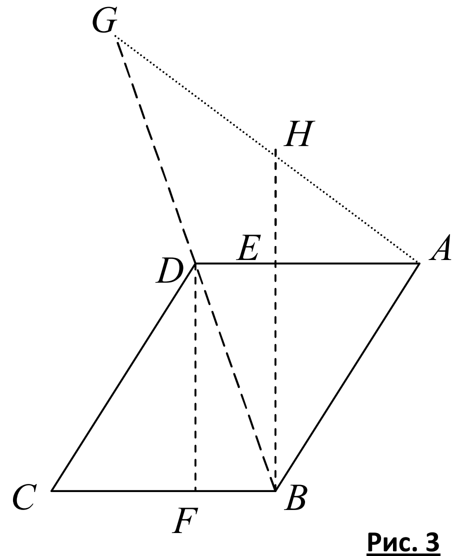


Рис. 3

<u>Розв'язання</u>. З формул площі трикутника та паралелограма очевидно, що $AE = 2DE$ (рис. 3). Оскільки AD – медіана ΔABG, тому E – точка перетину медіан ΔABG, а тому також медіана цього трикутника, звідки $AH = HG$.

9.5. Дано відрізок *OA*. Із кінця відрізка A виходить 6 відрізків $AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, AB_5, AB_6$. Із кожної точки B_i можуть виходити ще 6 нових відрізків, або жодного нового відрізка і т.д. Чи може число вільних кінців побудованих відрізків дорівнювати ***2016?*** (Під вільним кінцем відрізка розуміють точку, що належить тільки одному відрізку).

Розв'язання. Якщо з кінця B_i відрізка проведено ще 6 відрізків, то з'являються 6 нових вільних кінців, а один у точці B_i зникає. В результаті кількість вільних кінців відрізків збільшується на 5 . Тому, якщо п'ятірки відрізків проведено k разів, то кількість вільних кінців дорівнює $5k+1$ із врахуванням точки О. Прирівняємо $5k+1=2016$, знайдемо k.

$5k=2015$, $k=403$. Отже, на 403 кроці, матимемо 2016 кінців.

Відповідь: так, може.

10 клас

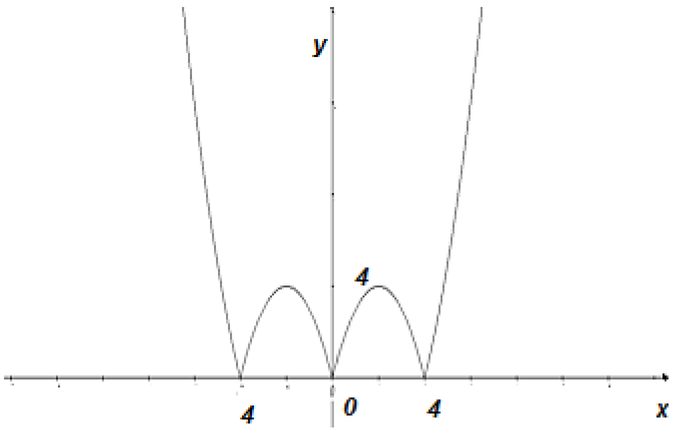
10. 1. Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x-4}{x-2}\right|\left(x^2+x-12\right)\leq 0.$

<u>Відповідь:</u> $[-4;2)\cup(2;3]\cup\{4\}$.

10. 2. Скільки коренів має рівняння $\left|x^2-4|x|\right|=a.$ залежно від значення параметра ***a***?

Розв'язання .

Побудуємо графік функції, що розташована в лівій частині рівняння.



Графіком функції $y = a$ – буде пряма, паралельна осі OX.

Кількість перетину графіків двох функцій буде відповідати кількості розв’язків рівняння.

Відповідь.

При a<0 – розв‘язків немає; при a=0 – три розв‘язки; при 0<a<4 – шість розв‘язків; при a=4 – чотири розв‘язки; при a>4 – два розв‘язки.

10.3. Доведіть, що 2015-цифрове число $\underbrace{11...1}_{1007}2\underbrace{11...1}_{1007}$ не є простим.

<u>Розв’язання</u>. Запишемо задане число таким чином:

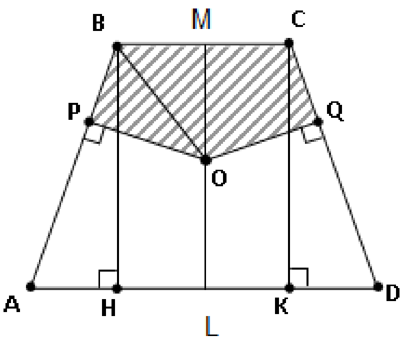
$$\underbrace{11...1}_{1007}2\underbrace{11...1}_{1007}=\underbrace{11...1}_{1007}1\underbrace{00...0}_{1007}+1\underbrace{11...1}_{1007}=\underbrace{11...1}_{1008}\underbrace{00...0}_{1007}+\underbrace{11...1}_{1008}\ \vdots\ \underbrace{11...1}_{1008},$$

а тому не є простим.

10.4. В трапецію з основами 3 см і 5 см можна вписати коло і навколо неї можна описати коло. Обчисліть площу п’ятикутника, утвореного радіусами вписаного у трапецію кола, перпендикулярними до бічних сторін, відповідними відрізками цих сторін і меншою основою.

Відповідь: $3\sqrt{15}см^2$

<u>Вказівка:</u> Оскільки у трапецію ABCD можна вписати коло , то BC+AD=AB+CD =8 см. Якщо навколо трапеції ABCD можна описати коло, то трапеція ABCD-рівнобічна. AB=CD =8:2=4 см.



Проведемо висоти BH і CK, тоді AH=KD= =1см.

З ΔABH ($< H = 90^0$); $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2}$;

$BH = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$

Тоді радіус вписаного кола $r = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\sqrt{15}$.

Проведемо висоту ML , OM=OL=r, O-центр вписаного кола.
$OP \perp AB, OQ \perp CD, OP = OQ = r.$ Розглянемо п'ятикутник $OPBCQ$, площу якого треба знайти. $\Delta OPB = \Delta OMB = \Delta OMC = \Delta OQC$ (за двома катетами).
$S_{OPBCL} = 4S_{OMB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot OM \cdot MB = 2 \cdot \sqrt{15} \cdot 1{,}5 = 3\sqrt{15}\left(см^2\right)$.

10.5. На нараду в міністерство для обговорення питань олімпіад запросили 30 Заслужених вчителів України з математики, фізики, хімії та біології. Серед запрошених фізиків та біологів разом виявилось удвічі менше ніж математиків, а фізиків та хіміків разом удвічі більше ніж біологів. Скільки на зустріч запросили математиків, якщо вчителів з кожного предмету була різна кількість?

Відповідь: 18.

Розв'язання. Позначимо кількість вчителів математиків, фізиків, хіміків та біологів через m, f, h, b відповідно. Тоді маємо такі умови:

$$\begin{cases} m + f + h + b = 30, \\ f + b = \frac{1}{2}m, \\ f + h = 2b. \end{cases}$$

З другого та третього рівняння маємо: $m = 2f + 2b$ та $h = 2b - f$. Якщо це підставити у перше рівняння, то матимемо, що $2f + 5b = 30$. Оскільки m, f, h, b – цілі невід'ємні числа, то зрозуміло, що b повинно бути парним числом від 0 до 6. Залишилося розглянути ці варіанти.

$b = 0 \Rightarrow f = 15 \Rightarrow m = 30 \Rightarrow h = -15$.

$b = 2 \Rightarrow f = 10 \Rightarrow m = 24 \Rightarrow h = -6$.

$b = 4 \Rightarrow f = 5 \Rightarrow m = 18 \Rightarrow h = 3$.

$b = 6 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow m = 12 \Rightarrow h = 12$.

З умов задачі, очевидно, що шуканим є варіант, де $m = 18$.

11 клас

11.1. Розв'яжіть рівняння $x^2 - \sin^2 y = 2x\cos y - 1 - y^2$.

***Відповідь*:** (1;0)

11.2. Для додатних чисел a, b, c, d доведіть нерівність:

$$\frac{(a+b)^2}{cd}+\frac{(c+d)^2}{ab}\geq 8.$$

***Розв'язання*.** Застосуємо двічі нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним:

$$\frac{(a+b)^2}{cd}+\frac{(c+d)^2}{ab}\geq \frac{4ab}{cd}+\frac{4cd}{ab}\geq 2\cdot 4\cdot\sqrt{\frac{ab}{cd}\cdot\frac{cd}{ab}}=8.$$

11.3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+3xy=3y+x, \\ y^2-yx=3x+y. \end{cases}$$

***Відповідь*:** $(0;\ 0)$, $(1;-1)$, $(1;\ 3)$ та $(6;-2)$.

Розв'язання. Додамо ці рівняння і одержимо, що

$$x^2+2xy+y^2=4y+4x \text{ або } (x+y)^2=4(x+y).$$

Тоді $x+y=0$ або $x+y=4$.

Якщо $x=-y$, то з другого рівняння маємо, що

$$2y^2=-2y, \text{ звідки } y=0 \text{ або } y=-1.$$

Звідси маємо, що $(0;\ 0)$, $(1;-1)$ – розв'язки системи.

Якщо $x=4-y$, то знову з першого рівняння маємо, що

$$y^2-y(4-y)=3(4-y)+y, \text{ звідки } y^2-y-6=0.$$

Знайдемо корені останнього рівняння: $y=3$ та $y=-2$. Одержуємо пари $(1;\ 3)$ та $(6;-2)$. перевіркою переконуємось, що вони задовольняють систему рівнянь, а тому є розв'язками.

11. 4. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює її меншій основі. Яким має бути кут при більшій основі трапеції, щоб її площа була найбільшою?

Розв'язання **.** В трапеції ABCD проведемо $BM\perp AD$, $CN\perp AD$, тоді $AD=a+2AM$. У $\Delta AMB\ (\angle M=90^\circ)$: $AM=a\cos\alpha$; $BM=a\sin\alpha$.

$S_{тр} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BM = \frac{a + a + 2a\cos\alpha}{2} \cdot a\sin\alpha = a^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha$. Розглянемо функцію $S_{тр}(\alpha)$ та дослідимо її на екстремуми. $S'_{тр} = a^2(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1)$;

$S'_{тр}(\alpha) = 0$; $2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$; $\left[\begin{array}{l}\cos\alpha = \frac{1}{2},\\ \cos\alpha = -1.\end{array}\right.$

За умовою α – гострий кут. Екстремуму функція $S_{тр}(\alpha)$ набуває при α=60°

($\cos\alpha = 0{,}5$). Розглянемо проміжки зростання (спадання) функції $S_{тр}(\alpha)$ в залежності від кута α. Найбільшого значення функція $S_{тр}(\alpha)$ набуває, коли α=60°.

11.5 Заданий ромб, у якого усі сторони та одна з діагоналей рівні 6 см. Всередині або на сторонах цього ромба вибирають довільним чином 9 точок. Доведіть, що принаймні дві з них знаходяться на відстані не більшій від 3 см.

Розв'язання. Розіб'ємо цей ромб спочатку на два правильних трикутники (рис. 1).

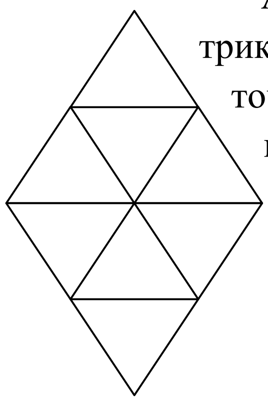


Рис. 1

А тепер кожний з них розіб'ємо на 4 рівних рівносторонні трикутники зі стороною 3 см. Усього маємо 8 трикутників, а точок 9, то за принципом Діріхле принаймні дві з них попадуть у один трикутник. Але найбільша відстань між точками в цьому трикутнику не перевищує 3 см, що й треба було довести.